Circuit RC en régime transitoire – Exercice 1 - Corrigé

Il s'agit de trouver *i(t)* pour une tension *u (t)* carrée de période *2h* représentée par la Figure 2. On procède alors à une résolution par intervalle de temps de durée *h* pendant laquelle la tension *u* reste constante et continue (dérivées définies). Les conditions initiales (C.I.) sont alors données par les valeurs finales de l'intervalle précédent.

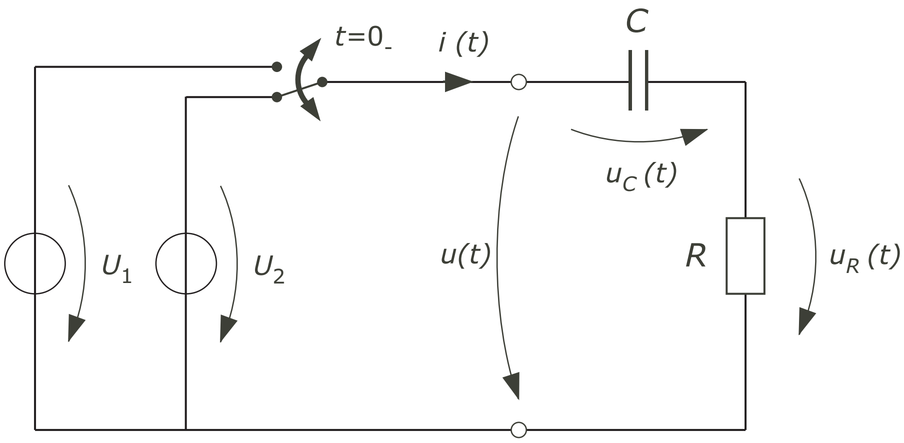

Figure 1 - Schéma électrique

Précisons déjà qu'il est impossible d'exprimer *i(t)* par une fonction analytique simple.

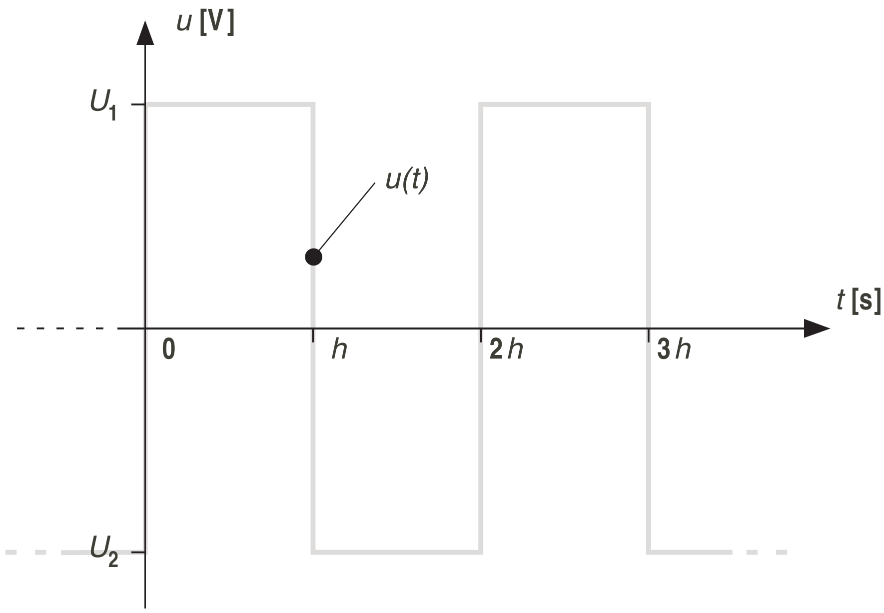

Figure 2 - Diagramme temporel de u(t)

A) $\underline{t \leq 0}$

$$u = U_2 \tag{1.1}$$

$$i = 0 \tag{1.2}$$

$$u_C = U_2 \tag{1.3}$$

B) $\underline{0 < t \leq h}$

*** Conditions initiales (C.I.) données par A)

*** Equation des éléments simples :

$$u = U_1 \tag{2}$$

$$u_C = u_{C0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt \tag{3}$$

$$u_R = R \cdot i \tag{4}$$

*** Equations de liaison :

$$u = U_1 = u_C + u_R \tag{5.1}$$

$$u = U_1 = u_{C0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot dt + R \cdot i \tag{5.2}$$

*** Equation différentielle ; Dériver (5.2) :

$$\frac{du}{dt} = 0 = \frac{1}{C} \cdot i + R\frac{di}{dt} \tag{6}$$

Cette équation (6) admet une solution de type :

$$i(t) = a_0 \cdot e^{b_0 \cdot t} \tag{7}$$

*** Détermination des constantes d'intégration a_0 et b_0 :

1°) Remplacer (7) dans (6) :

$$\frac{a_0}{C} \cdot e^{b_0 \cdot t} + R \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot e^{b_0 \cdot t} = 0$$

d'où : $$b_0 = -\frac{1}{RC} \tag{8.1}$$

Posons : $$\tau = RC \tag{8.2}$$

Il s'agit de la **constante de temps** électrique du circuit.

2°) En t = 0, un saut de tension aux bornes de la capacité est impossible ; Donc, avec les équations (5.1) et (1) et pour $t = 0$:

$$u_C = u_{C0} = U_1 - u_R = U_1 - R \cdot i \qquad \text{en } t = 0$$

$$u_{C0} = U_1 - a_0 \cdot R \cdot e^{(-0/\tau)}$$

d'où : $$a_0 = \frac{u_{C0} - U_1}{-R} \cdot e^{(+0/\tau)} = \frac{U_1 - u_{C0}}{R} \tag{9}$$

*** C.I. pour l'intervalle suivant :

$$u_C = u_{C0} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t a_0 \cdot e^{(-t/\tau)} \cdot dt \qquad 0 < t \leq h$$

$$u_C = u_{C0} - R \cdot a_0 \left[e^{(-t/\tau)} - e^{(-0/\tau)} \right]$$

d'où : $$u_{C1} = u_C \big|_{t=h} = u_{C0} - R \cdot a_0 \left[e^{(-h/\tau)} - e^{(-0/\tau)} \right] \tag{10}$$

C) $\underline{h < t \leq 2h}$; Démarche identique à celle pour l'intervalle précédent :

*** C.I. données par B)

*** Equations des éléments simples :

$$u = U_2 \tag{11}$$

$$u_C = u_{C1} + \frac{1}{C} \cdot \int_h^t i \cdot dt \tag{12}$$

$$u_R = R \cdot i \tag{13}$$

*** Equations de liaison

$$u = U_2 = u_C + u_R \tag{14.1}$$

$$u = U_2 = u_{C1} + \frac{1}{C} \cdot \int_h^t i \cdot dt + R \cdot i \tag{14.2}$$

*** Equation différentielle ; Dériver (14.2)

$$\frac{du}{dt} = 0 = \frac{1}{C} \cdot i + R \frac{di}{dt} \tag{15}$$

Cette équation (15) admet une solution de type :

$$i(t) = a_1 \cdot e^{(-t/\tau)} \tag{16}$$

τ donné par l'expression (8.2)

*** Détermination de la constante d'intégration a_1 :

En $t = h$, un saut de tension aux bornes de la capacité est impossible ; donc avec les équations (14.1) et (10) et pour $t = h$:

$$u_C = u_{C1} = U_2 - u_R = U_2 - R \cdot i \qquad \text{en } t = h$$

$$u_{C1} = U_2 - a_1 \cdot R \cdot e^{(-h/\tau)}$$

d'où : $$a_1 = \frac{u_{C1} - U_2}{-R} \cdot e^{(+h/\tau)} \tag{17}$$

*** C.I. pour l'intervalle suivant :

$$u_C = u_{C1} + \frac{1}{C} \cdot \int_h^t a_1 \cdot e^{(-t/\tau)} \cdot dt \qquad h < t \leq 2h$$

$$u_C = u_{C1} - R \cdot a_1 \left[e^{(-t/\tau)} - e^{(-h/\tau)} \right]$$

d'où : $$u_{C2} = u_C\big|_{t=2h} = u_{C1} - R \cdot a_1 \left[e^{(-2h/\tau)} - e^{(-h/\tau)} \right] \tag{18}$$

Ainsi, d'une façon identique, il est possible de déterminer *i(t)* pour les intervalles suivants ; On peut alors formuler la solution sous forme récurrente :

I) $\underline{t \leq 0}$

$$u = U_2$$

$$i = 0$$

$$u_{C0} = U_2$$

II) $\underline{t > 0 \;\rightarrow\; kh < t \leq (k+1)h}$ avec : k : 1, 2, 3, 4, …

*** C.I. données par intervalle $[k-1, k]$:

$$u_{Ck} = u_C\big|_{t=kh}$$

*** tensions et courants :

$u = U_j$ j = 1 si k est pair
j = 2 si k est impair

$i(t) = a_k \cdot e^{(-t/\tau)}$ avec : $\tau = RC$

*** C.I. pour l'intervalle suivant :

$$u_{Ck+1} = u_C\big|_{t=(k+1)h}$$

$$u_{Ck+1} = u_{Ck} - R \cdot a_k \left[e^{(-(k+1)h/\tau)} - e^{(-kh/\tau)} \right]$$

La figure 3 donne les allures du courant *i(t)* et de la tension *u(t)* pour une durée d'environ 10 ms.

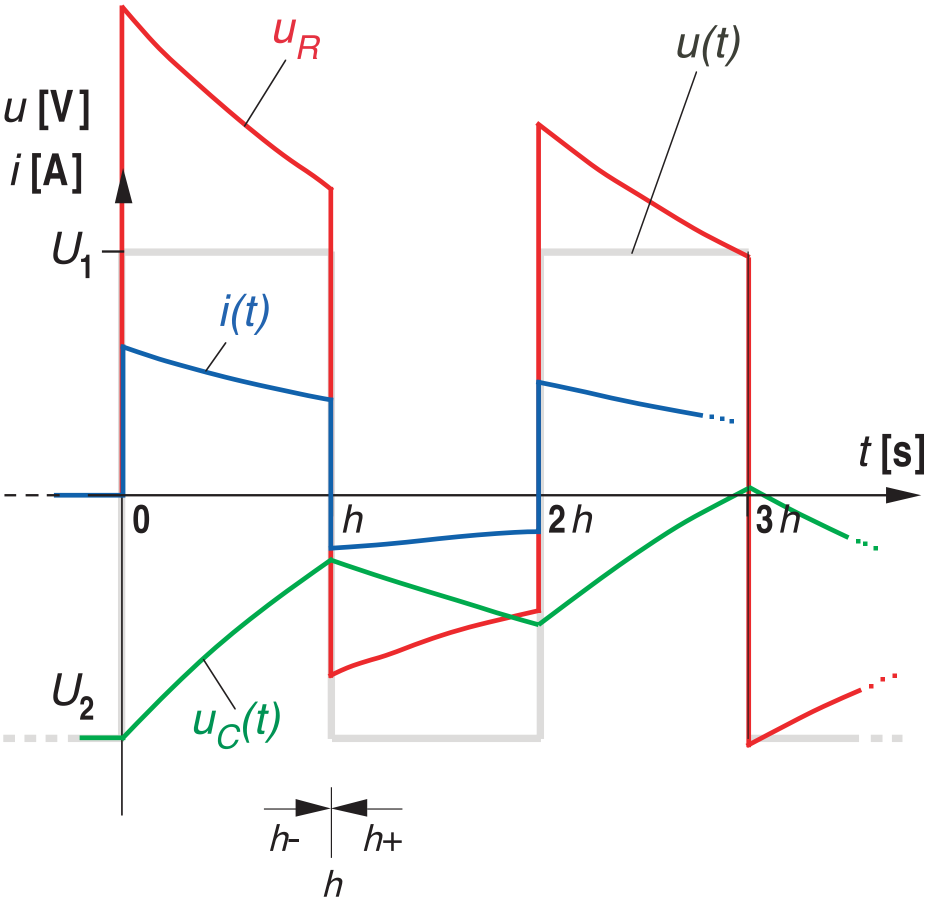

Figure 3 - Diagramme temporel de i(t), u(t), $u_R(t)$ et $u_C(t)$

APPLICATION NUMERIQUE

On donne ici quelques valeurs discrètes aux instants de commutation :

h^- signifie le moment juste avant $t = h$
h^+ signifie le moment juste après $t = h$

Avec :

h	=	3	ms
R	=	33.3	Ω
C	=	$150 \cdot 10^{-6}$	F
U_1	=	+ 200	V
U_2	=	- 200	V

On trouve :

τ	=	4.9	ms	par (8.2)

a_0 et u_{C1} par (9) et (10) :

a_0	=	12.01	A
u_{C1}	=	-19.39	V

a_1 et u_{C2} par (17) et (18) :

a_0	=	-9.88	A
u_{C1}	=	-100.60	V

Pour le courant i_C :

i	=	12.01	A	en $t = 0$
i	=	6.58	A	en $t = h^-$
i	=	-5.42	A	en $t = h^+$
i	=	-2.97	A	en $t = 2h^-$
i	=	9.03	A	en $t = 2h^+$

Pour la tension u_C :

u_C	=	-200	V	en $t = 0$
u_C	=	-19.39	V	en $t = h$
u_C	=	-100.86	V	en $t = 2h$

•